**Симметрия (факультативные занятия для учащихся 7-8 классов)**

**1. Психолого-педагогические посылки к разработке факультатива**

Математика является в школе опорным предметом, обеспечивающем изучение на современном этапе ряда других дисциплин.

На факультативных занятиях учащиеся расширяют и углубляют знания, полученные по основному курсу, получаемые на уроках, приобретают, обрабатывают умения решать задачи более трудные и разнообразные.

На факультативных занятиях для учащихся 7-8 классов целесообразно изучение отдельных вопросов или их фрагментов, не связанных между собой. При отборе этих вопросов, наряду с их внутриматематической и прикладной значимостью, степенью проработки, предусмотренной программой основного курса, должны учитываться также возможности их углубленного рассмотрения в доступной занимательной форме, обеспечение содержательными задачами.

В старших классах необходимы также факультативы обзорного характера, освещающие роль и место данной темы в современном мире. Соответствующие занятия могут проводится в форме лекций, экскурсий, докладов и рефератов учащихся по определённой теме. Такой факультатив будет полезен и интересен даже тем учащимся, которые не проявляют принципиального интереса и склонности к занятиям математикой, но хотят расширить свой кругозор.

Цель факультатива:

1. Углубить отдельные, наиболее важные вопросы из основного курса, систематизировать материал, изучаемый на уроках, дополняя основной курс сведениями, важными в общеобразовательном и прикладном отношении.
2. Способность успешной подготовки учащихся для продолжения образования, повышения их математической культуры.

Объяснительная записка

Исходя из целей, продумываются основные формы работы факультатива. Темы факультатива независимы друг от друга и могут изучаться в любом разумном порядке.

Основная методическая установка факультатива – организация самостоятельной работы учащихся при ведущей и направляющей роли учителя.

Целесообразно начать изучение темы с рассмотрения симметрии в реальном мире, так как научный материал очень сложный и необходимо сначала заинтересовать учащихся, а потом поставить перед ним задачу объяснить эти природные «чудеса» с точки зрения науки.

**2. Осевая симметрия на плоскости. Уроки 1-2**

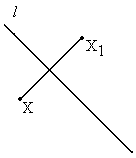
В окружающей человека жизни очень часто встречаются различные симметричные фигуры. Например, здание, лист,…

Симметрия бывает различных видов (сослаться на примеры гл. I, проиллюстрировать картинками, чертежами. Остановимся на простейших видах симметрии.

Тема «Симметрия на плоскости»

Две точки *Х* и *Х*1 называются симметричными относительно прямой *l*, если эта прямая – серединный перпендикуляр отрезка *ХХ*1 (рис. 1)

Если точка *Х* лежит на прямой *l*, то считается симметричной сама себе относительно прямой *l*. При этом фигуры F и F1 называют симметричными относительно прямой *l*.



**Теорема:** Симметрия относительно прямой является движением.

**Доказательство**. Пусть произвольные точки *Х* и *У* фигуры *F* при

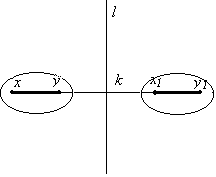
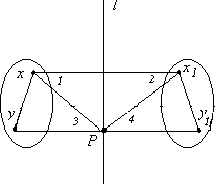


Рис. 2, 3

симметрии относительно прямой *l* отображаются на точки *Х*1 и *У*1 (рис. 2).

Докажем, что *ХУ* = *Х*1*У*1. Рассмотрим сначала случай, когда точки *Х* и *У* не лежат на одном перпендикуляре к прямой *l*. Если *К* и *Р* – точки пересечения отрезков *ХХ*1 и *УУ*1 с прямой l, то прямоугольные треугольники *ХКР* и *Х*1*КР* равны (по двум катетам). Следовательно, *ХР* = *Х*1*Р* и ∠1 = ∠2. Тогда имеем ∠3 = ∠4, Δ *ХУР* = Δ*Х*1*У*1*Р,* *ХУ* = *Х*1*У*1. Если точки X, У, X1, У1 лежат на одной прямой (рис. 3), то

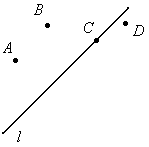
*ХУ* = |*КХ* - *КУ*| = |*КХ*1 – *КУ*1| = *Х*1*У*1. Итак, *ХУ* = *Х*1*У*1. Так как симметрия относительно прямой является движением, то при этом преобразовании прямая переходит в прямую, окружность – в окружность, любая фигура – в равную ей фигуру.

Если симметрия относительно прямой l отображает фигуру F в эту же фигуру, то данная фигура называется симметричной относительно прямой, а прямая l её осью симметрии. Например, прямые на которых лежат диагонали ромба, - его оси симметрии, квадрат – четыре, а окружность – бесконечно много.

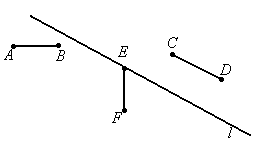
**Упражнения**

1. Осевая симметрия задана осью l. Построить:

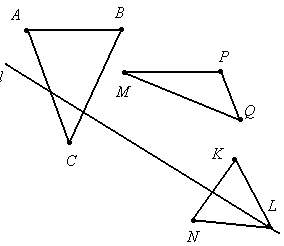
а) точки, симметричные заданным относительно прямой l;



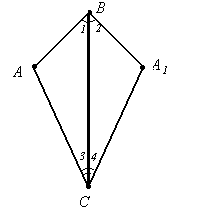
б) отрезки, симметричные заданным относительно прямой l



в) треугольники, симметричные заданным относительно прямой l



1. Имеет ли оси симметрии (если имеет, то сколько и как расположены): а) равносторонний треугольник; б) прямоугольник; в) окружность; в) ромб.



1. В треугольниках *АВС* и *А*1*ВС* ∠1 = ∠2, ∠3 = ∠4.

Докажите, что данные треугольники симметричны относительно оси *ВС*.

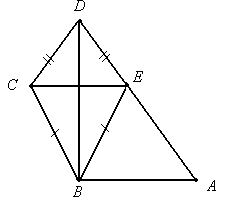
Доказательство. 1. Δ *АВС* и Δ *А*1*ВС* ∠1 = ∠2, ∠3 = ∠4 (по условию), *ВС* – общая, следовательно, Δ *АВС* = Δ *А*1*ВС* (по II признаку).

2. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих углов и сторон, следовательно, Δ *АВС* = .

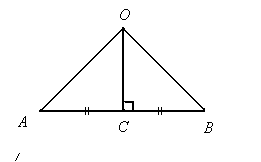
**4.**Построить четырёхугольник по четырём сторонам, если известно, что его диагональ делит один из углов пополам.

Построение

1. *BD* – диагональ *ABCD* делит ∠ *В* пополам,
2. Пусть *AD* > *CD*,
3. *BD* – ось симметрии и, перегнув рисунок по этой оси, на *AD* получим точку *E*, симметричную с точкой *С* относительно *BD.*
4. Соединим точки *В* и *Е*, тогда *ВЕ* = *ВС*, *DE* = *DC* и *АЕ* = *AD* – *CD*, следовательно, Δ *АВЕ* можно построить по трём сторонам.
5. На АЕ от точки А откладываем сторону *AD*.



1. Используя *ВС* и *DC*, получаем четвёртую вершину *С*, для чего из точек *B* и *D*, как из центров радиусами *ВС* и *DC* проводим дуги, пересечение которых даст точку *С.*
2. Докажите равенство отрезков ОА и ОВ.



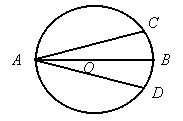
Доказательство.

* 1. Рассмотрим симметрию с осью ОС.

Докажем, что *АО* =  , так как  и (по условию), , так как . Значит, .

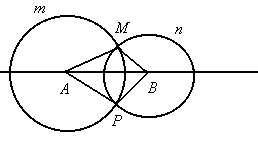
1. Начертите окружность и проведите диаметр *АВ*. Постройте равные хорды *АС* и *АD*. Докажите, что точки *C* и *D* симметричны относительно прямой *АВ*.

Доказательство. Пусть *О* – центр окружности. Точка, симметричная точке *С* относительно прямой *АВ*, должна лежать, во-первых, на одной окружности, так как окружность – фигура, симметричная относительно *АВ*, и, во-вторых, на том же расстоянии от точки *А*, что и точка *С*, так как осевая симметрия сохраняет расстояние. Точкой, удовлетворяющей этим двум условиям, является точка *D*, значит, точка *D*, симметрична точке *С* относительно прямой *АВ*.



1. Изобразите на листе бумаги прямую *р* и многоугольник *F*. С помощью циркуля и линейки постройте фигуру *F*, симметричную данной относительно прямой *р*.
2. Возьмите лист бумаги, проведите на нём прямую *р* и отметьте какую-нибудь точку *А*, не лежащую на этой прямой. Перегните лист бумаги по линии *р*, отметьте точку *А',* с которой совместится точка *А* и снова разогните его. Докажите, что полученная точка *А'* и данная точка *А* симметричны относительно прямой *р*.
3. Даны две окружности *m* и *n* с центрами *А* и *В*, пересекающиеся в точках *М* и *Р.* Доказать, что точки *М* и *Р* симметричны относительно прямой *АВ*.

Решение



Обозначим через *М*1 образ точки *М* при рассматриваемой симметрии. Мы пока не знаем, совпадает ли *М*1 с *Р*. Ясно, что *А М*1 = *АМ* (ведь точка *А* остаётся неподвижной, а расстояния сохраняются). Это означает, что *М*1 принадлежит окружности *m*. Точно также *ВМ* = *В М*1, т. е. точка *М*1 принадлежит также окружности *n*. Таким образом, *М*1 есть одна из точек пересечения окружностей *m* и *n*. Следовательно, *М*1 должна совпадать с точкой *Р*, т. е. *М* → *Р*.

**Математический диктант**

**В - 1**

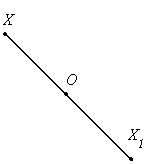
* 1. Точки … и … называются симметричными относительно прямой …, если … .
  2. Фигура … называется симметричной относительно оси … , если … .
  3. Осевая симметрия является … .
  4. Осью симметрии равнобедренного треугольника является … .
  5. Примером фигуры, не имеющей оси симметрии, является … .

**В – 2**

1. Осевой симметрией называется … .
2. Две фигуры … и … называются симметричными относительно оси …, если … .
3. Осью симметрии отрезка является … .
4. Осью симметрии равнобедренной трапеции является … .
5. Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, является … .

**3. Центральная симметрия на плоскости. Урок 3-4**

Точки *Х* и *Х*1 называются симметричными относительно точки *О*, если *О* – середина отрезка *ХХ*1. (рис. 4).

 Рис.4

Рассмотрим две фигуры *F* и *F*1. Если относительно одной и той же точки *О* каждая точка фигуры *F* симметрична некоторой точке фигуры *F*1 и наоборот, то фигуры *F* и *F*1 называют симметричными относительно точки *О* (рис. 5)

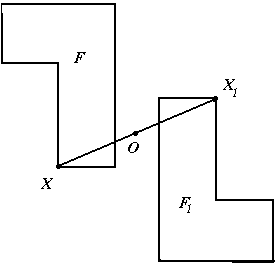
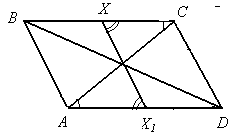


Рис.5

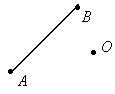
Такое преобразование фигуры *F* в *F*1 называют преобразованием симметрии относительно точки. При симметрии относительно точки прямая переходит в прямую, окружность в окружность, любая фигура в равную ей фигуру.

Если симметрия относительно точки *О* отображает фигуру *F* на себя, то фигура *F* называется центрально-симметричной, а точка *О* – её центром симметрии. Например, параллелограмм – фигура центрально-симметричная. Центром симметрии параллелограмма является точка пересечения его диагоналей. Для каждой точки *Х* параллелограмма *ABCD* существует точка *X*1 этого же параллелограмма, симметричная относительно точки *О* (рис. 6). Действительно, *ОА* = *ОС*, *∠ 1* = *∠ 2*, *∠ 3* = *∠ 4*; поэтому Δ *НОХ*1 = Δ *СОХ*, откуда следует, что *ОХ* = *ОХ*1.

Рис. 6

Упражнения.

1. Центральная симметрия задана точкой О. Построить отрезок симметричный данному относительно точки О.

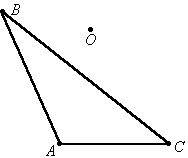


а) *О*∉ *АВ*;



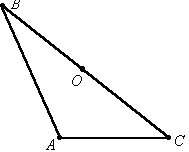
б) *О*∈*АВ*;

1. Центральная симметрия задана точкой *О*. Построить треугольник симметричный данному относительно точки *О*.



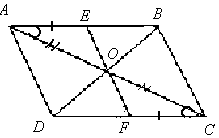
а) *О*∉ *АВС*;

б) *О*∈*АВС*;



1. На противоположных сторонах *АВ* и *СD* параллелограмма *АВСD* отложены равные отрезки *AE* и *CF*. Докажите, что точки *E*, *F*, *O* – точка пересечения диагоналей параллелограмма – принадлежат одной прямой.

Доказательство.

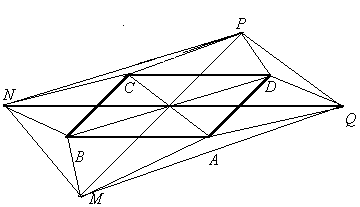


Рассмотрим треугольник *АЕО* и треугольник *FOC*: *АО*=*OC* (по свойству параллелограмма), *AE=FC* (по условию),

угол *EAO* и *OCF* (как внутренние накрест лежащие при параллельных *AB* и *DC* и секущей *AC*)⇒

 *AOE =* *FOC⇒ EO = OF.*

1. На сторонах параллелограмма *ABCD* построены вне его равносторонние треугольники *ABM, BCN, CDP, AOQ*. Докажите, что *MNPQ* – параллелограмм.

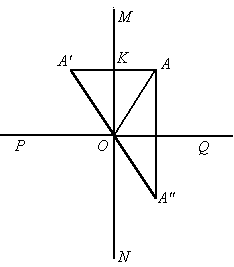


Доказательство.

Обозначим Через *О* центр симметрии параллелограмма *АВСD*. Так как отрезки *AB* и *CD* симметричны относительно точки *О*, то треугольники *ABM* и *CDP* симметричны относительно этой точки. Следовательно, точки *M* и *P* симметричны относительно *О*, т. е. *О* – середина отрезка *MP*. Аналогично, *О* – середина отрезка *NQ*. Из этого вытекает, что *MNPQ* параллелограмм.

1. Пусть *MN* и *PQ* - перпендикулярные прямые, *O -* точка их пересечения. Точки *A*’ и *A’’* симметричны относительно *MN* , а точки *A’’* и A относительно *PQ* . Доказать, что точки *A*’ и *A’’*симметричны относительно точки *О*.

Доказательство.



Докажем, что линия *A’ОA’’* – прямая и *A*’*О =ОA’’*. Из равенства прямоугольных треугольников *АОК* и *А’ОК*, *AOL* и  *A”OL*⇒ что треугольники *AOA”*  , *AOA’* равнобедренные, а потому углы *АОК*  и *А’ОК* равны, а так же *AOL* и *A”OL* равны, зная, что сумма углов *AOL* и *АОК* равна 900, значит сумма углов

*AOA”*+ *AOA’*  = 900 + 900 = 1800, т. е. Точки *A’* и *A”, О* лежат на одной прямой, при этом *A”O = OA= ОA’*, как стороны равнобедренных треугольников с общей боковой стороной *ОА*. Следовательно, точки *A’* и *A”* симметричны относительно центра *О.*

1. Практическое задание. Вырежьте из бумаги две равные несимметричные фигуры, например в форме буквы «Г». Расположите их на столе так, чтобы одну из них можно было отобразить на другую:

а) симметрией относительно точки;

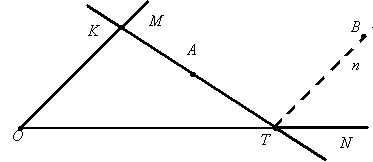
б) симметрией относительно некоторой прямой.

1. Постройте на листе бумаги точку *О* и четырех угольник *F*. C помощью циркуля и линейки постройте фигуру *F’*, симметричную данной относительно точки *О*.
2. Внутри угла, меньшего чем развернутый, дана точка *А*. Постройте такую прямую, проходящую через точку *А*, что ее отрезок, заключенный внутри угла, делится в точке *А* пополам.

Решение

Пусть *К* и *Т* точки пересечения искомой прямой со сторонами данного угла *MON*. При симметрии относительно *А* точка *К* переходит в точку *Т*. Следовательно, прямая *n*, являющаяся образом прямой *ОМ* при этой симметрии, содержит образ точки *К* , т. е. точку *Т*. Поэтому *Т* есть точка пересечения прямых *ОN* и *n*.

Построение.



Строим точку *В* , симметричную точке *О* относительно центра *А*, и проводим через *В* прямую, параллельную *ОМ*. Это и будет прямая *n*, а точка ее пересечения с *ON* – искомая точка *Т.*

**Математический диктант**

Вариант –1

1. Центральной симметрией называется…
2. Две фигуры … и … называются центрально-симметричными относительно…, если…
3. Центральная симметрия является…
4. Центром симметрии отрезка является…
5. Прямоугольник … центрально-симметричной фигурой.

Вариант –2

1. Точки … и … называются центрально-симметричными относительно … , если …
2. Фигура … называется центрально-симметричной относительно … , если …
3. Центр симметрии переходит …
4. Центральная симметрия переводит точку *Н* в точку *Н*’, центр симметрии находится …
5. Ромб … центрально-симметричной фигурой.

**4. Симметрия в пространстве.**

**Урок 5**

Для пространственных фигур понятие симметрии определяется так же как и на плоскости.

***Определение*** Точка *А* и *А*′ пространства называются симметричными относительно точки *О*, если *О* является серединой отрезка *АА*′. Точки *А* и *А*′ называются при этом центрально-симметричными, а точка *О* – центром симметрии.

Фигура *Ф* в пространстве называется центрально-симметричной относительно точки *О*, если каждая точка *А*  фигуры *Ф* центрально – симметрична относительно точки *О* некоторой точке *А*′ фигуры *Ф*.

Например, прямоугольный параллелепипед центрально – симметричен относительно пересечений его диагоналей. Шар центрально-симметричен относительно своего центра и т. д.

***Определение*** Точки А, А′ пространства называются симметричными относительно прямой *а* , если прямая *а* проходит через середину отрезка *АА*′ и перпендикулярна этому отрезку. Прямая *а* при этом называется осью симметрии.

Фигура *Ф* в пространстве называется симметричной относительно оси *а* , если каждая точка *А* фигура *Ф* симметрична относительно этой оси некоторой точке *А*′ фигуры *Ф*.

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через центры противоположных граней, прямой круговой цилиндр симметричен относительно оси вращения.

***Определение*** Точки А, А′ пространства называются симметричными относительно плоскости α , если эта плоскость проходит через cередину отрезка *АА*′ и перпендикулярна этом отрезку. Прямая *а* при этом называется осью симметрии.

Фигура *Ф* в пространстве называется симметричной относительно оси *а,* если каждая точка *А* некоторой точке *А*′ фигуры *Ф*.

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через центры противоположных граней, прямой круговой цилиндр симметричен относительно оси вращения.

***Определение***. Точки *А, А*′ пространства называются симметричными относительно плоскости *α*, если эта плоскость проходит через середину отрезка *АА*′ и перпендикулярна этому отрезку. Плоскость *α* при этом называется плоскостью симметрии.

Фигура *Ф* в пространстве называется симметричной относительно плоскости *α*, если каждая точка *А* фигуры *Ф* симметрична относительно этой плоскости некоторой точке *А*′ фигуры *Ф.*

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно плоскости, проходящей через оси симметрии.

Помимо осей симметрии, рассмотренных выше, рассматриваются также оси симметрии *n*-го порядка, *n > 2*.

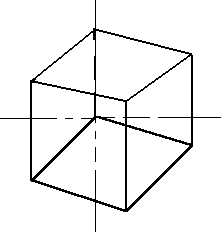
Прямая *а* называется осью симметрии *n*-го порядка фигуры *Ф* на угол *3600/n* относительно прямой *а* фигуры *Ф* совмещается сама с собой.

Ось симметрии 2-го порядка является просто осью симметрии.

Высота правильной треугольной пирамиды, опущенной на основание, являющееся равносторонним треугольником, является осью симметрии 3-го порядка, т. к. при повороте на 1200 относительно этой оси, пирамида совмещается сама с собой. Вообще, высота правильной *n-*угольной пирамиды является осью симметрии *n-*го порядка.

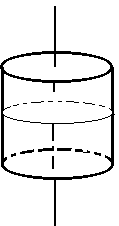
Упражнения

1. Сколько осей симметрии имеет шар ?

Рис. 17, а

1. Осью симметрии какого порядка являются прямые, проходящие через центры противоположных граней куба ?

Ответ: Куб имеет три поворотные оси 4-го порядка.

Рис. 17, б

1. Сколько у цилиндра осей симметрии ?

Ответ: Цилиндр имеет бесконечное число поворотных осей 2-го порядка и одну поворотную ось бесконечно высокого порядка.

4. На рисунке 19 изображено геометрическое тело, составленное из двух одинаковых правильных четырёхугольных пирамид. Определить

сколько а) осей симметрии;

б) плоскостей симметрии у этой фигуры.

Ответ: а) Данное геометрическое тело имеет одну поворотную ось 4-го порядка (ось *АВ*), четыре поворотные оси 2-го порядка (оси *СЕ*, *DF*, *МР*, *NQ*).

б) пять плоскостей симметрии (плоскости *CDEF*, *AFBD*, *ACBE*, *AMBP*, *ANBQ*).

**Внеклассное мероприятие**

Тема: Конструктор «В мире симметрии». В рамках моей работы хочу предложить дидактическую игру, рекомендованную для 7-8 классов – Конструктор «В мире симметрии». Как известно, симметрию можно обнаружить почти везде, если знать, как её искать. Многие народы с древнейших времён владели представлением о симметрии в широком смысле – как об уравновешенности и гармонии. Творчество людей во всех своих проявлениях тяготеет к симметрии. Посредством симметрии человек всегда пытался, по словам немецкого математика Германа Вейля, «постичь и создать порядок, красоту и совершенство». Это же имел в виду и французский архитектор Ле Карбюзье, когда писал, что «человеку необходим порядок; без него все действия теряют согласованность, логическую взаимосвязь …». Упорядоченность и подчиненность определенному набору правил мы обнаруживаем в узорах и орнаментах. Конструктор, который я предлагаю, вводит ученика в прекрасный мир симметрии.

Цель конструктора – знакомство с разнообразными симметричными орнаментами. Правила игры с таким конструктором очень просты и не предполагают наличия никаких предварительных знаний о симметрии. Приведем примеры орнаментов.

**Пример 1**  Из твердого материала (картон, пластмасса и т. д. ) вырезать фигуры двух видов: прямоугольники со сторонами 5 и 10 см (можно взять другие размеры, но отношение сторон должно быть 1: 2) и равнобедренные трапеции (большее основание – 10 см; меньшее основание и боковые стороны – по 5 см.). Изготовить по 10 –12 фигур каждого вида. Обратить внимание на то, что фигуры имеют выемки и выступы. (рис. 1.), а именно: меньшие стороны прямоугольника по центру имеют выступы в виде равностороннего треугольника. Меньшее основание трапеции, в свою очередь, имеет выемку таких же формы и размера. Большие стороны прямоугольника имеют такую же выемку. В результате должен получиться узор, как на рис. 2.

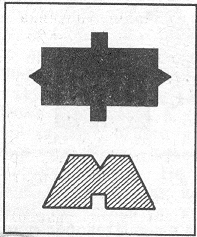
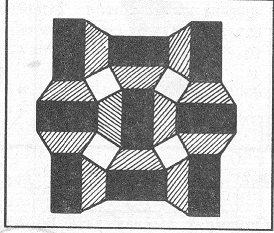
 

Рис. 1 Рис. 2

Не заполненные деталями конструктора области (пробелы) имеют форму квадратов, и на рисунке они не закрашены

**Пример 2**  Изготовить фигуры двух видов: квадраты со стороной 5 см и ромбы с углами 600 и на 1200 и стороной 5см. Две противоположные стороны квадрата по центру имеют выступы в форме прямоугольного треугольника (длины сторон прямоугольного треугольника произвольные). Точно такой же формы и таких же размеров выемки находятся на всех сторонах ромба. (рис. 3). На сторонах ромба выемки также располагаются по центру. Обратить внимание на то, что катет выемки «смотрит» в сторону острого угла ромба, а гипотенуза – тупого. Состыковывая квадраты и ромбы, получить орнамент, как на рисунке 4.

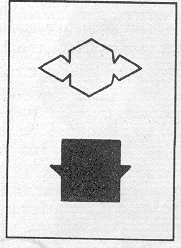
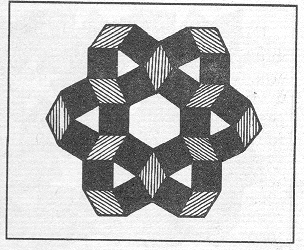
 

Рис. 3 Рис. 4

Этот орнамент имеет пробелы двух видов: правильные треугольники и правильные шестиугольники. Они на рисунке не закрашены.

**Пример 3** . В основе этого орнамента – вновь фигуры двух видов ромбы с углами 600 и 1200 и стороной 5см и равносторонние треугольники со стороной 5 см. Следует обратить внимание на форму выемок и выступов (рис. 5). Выкладывая этот орнамент, нельзя переворачивать детали конструкторов тыльной стороной! В результате получается орнамент с пробелами в форме правильных шестиугольников (рис. 6).

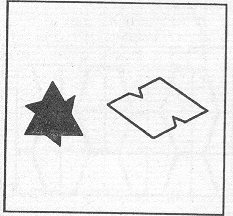
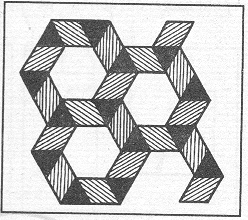
 

Рис. 5 Рис. 6

Идея конструктора с выемками и выступами («замками») была предложена английским кристаллографом Аланом Маккеем. Прекрасным образцом в этой области служит сюжет «Кленовый лист».

**Заключение**

Систематическое изучение геометрических преобразований плоскости и пространства необходимо в школьном курсе геометрии, так как они концентрируют знания из других областей математики.

Материал данного факультатива был предложен для занятий учащимся 7-8 классов .В конце факультативных занятий был проведён итоговый урок (контроль знаний), который позволил проверить теоретические знания и навыки учеников всего класса.

Предложенные в факультативе методы работы представляют учащимся возможность рассматривать задачи с различных позиций рассуждений, что развивает их творческие и познавательные способности.

Занятия факультативного курса помогают не только отработать тот материал, который предусмотрен обязательным уровнем обучения, но и позволяет расширить его, углубить, дать более научное, логически построенное объяснение тем или иным научным фактам.

**Литература**

1. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия – М.: 1996
2. Атанасян Л. С. Аналитическая геометрия. I ч – М. Просвещение, 1986
3. Базылев В. Г. Геометрия – М: Просвещение, 1974
4. Бевз Г. П. И др. Геометрия: Учебник для 7-11 классов общеобразовательных учреждений – М: Просвещение, 1994
5. Болтянский В. Г. Поворот и центральная симметрия// Математика в школе, № 6, 1989
6. Вейль Г. Симметрия – М.: Наука, 1968
7. Гарднер М. Этот правый, левый мир. Пер. с англ.- М: Мир, 1967
8. Гончарова С. Г., Кукин Г. П. Конструктор «В мире симметрии»// Математика в школе, № 3, 1996
9. Китайгородский А. И. Порядок и беспорядок в мире атомов. – М.: Наука, 1977
10. Компанеец А. С. Симметрия в микро- и макромире. – М.: Наука, 1978
11. Малова И. Е. Доказательство равенства фигур с использованием осевой симметрии// Математика в школе, № 2, 1983
12. Мороз О. П. В поисках гармонии. – М. : Атомиздат, 1978
13. Пидоу Д. Геометрия и искусство. М.: Мир, 1979
14. Смирнова Е. С., Леонидова Н. А. Математическое путешествие в мир гармонии//Математика в школе, № 3, 1993
15. Тарасов Л. В. Этот удивительно симметричный мир. – М.: Просвещение, 1982
16. Хлопонина Э. П. Аналитическая геометрия аффиных и евклидовых пространств. – Ставрополь, 1998