**Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Тосненская средняя общеобразовательная школа №3 имени Героя Советского Союза С.П. Тимофеева»**

# ЗАДАЧИ НА ПЕРЕЛИВАНИЕ ЖИДКОСТИ

(проектно-исследовательская работа по математике)

**Выполнил:** Бабинцев Максим

учащийся 5 класса

# Руководитель: Неизвестный Е.В.

учитель математики

# ОГЛАВЛЕНИЕ

[ВВЕДЕНИЕ](#_TOC_250020) 3

[ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ](#_TOC_250019) 5

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ 15

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 20](#_TOC_250008)

[ЛИТЕРАТУРА 21](#_TOC_250007)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 1 23](#_TOC_250006)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 2 24](#_TOC_250005)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 3 25](#_TOC_250004)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 4 26](#_TOC_250003)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 5 28](#_TOC_250002)

# ВВЕДЕНИЕ

С помощью математики мы исследуем окружающий мир и продвигаем технический прогресс. И конечный результат деятельности людей зависит, в частности, от того, как совершается данный процесс, какие способы, приемы, средства при этом применяются. Многие люди не являясь математиками, но так или иначе используют математические приемы и методы, при этом упрощая свою работу в практической жизни.

Например, решая проблемы на переливания.

На курсе внеурочной деятельности по математике решали задачу на переливание «как, используя два сосуда 5 л и 3 л, налить 7 л?» методом рассуждения. Показалось, сложно на первый взгляд. Куда наливать, в какой сосуд сначала? Что дальше? Решение задачи заняло почти 20 минут, и не сразу класс пришел к верной цепочке умозаключений. Вскоре такие задачи мы решали на школьном туре олимпиад. **Проблема** как научиться решать и решать быстро такие задачи привела нас к поиску более простых методов, чем метод рассуждений.

Изучая информационные источники, оказалось, что есть метод биллиардного шара. Даже название метода заинтриговало. В чем состоит этот способ решения задач на переливания? Есть ли еще другие методы? Какой самый универсальный, применим к любым задачам, простой в применении и на практике?

Так возникло решение написать учебный проект на тему «Задачи на переливание жидкости».

**Актуальность данного учебного проекта состоит в том, что** результат исследования применения разных методов решения задач на переливания поможет обстоятельно ответить на вопрос, какой способ самый универсальный и простой, какой применим на практике, в жизни, на уроках математики, при решении олимпиадных задач 5-6 классов.

**Объект исследования** – логические задачи на переливания.

**Предмет исследования** – методы решения задач на переливания.

**Цель исследования**: исследовать разные способы решения задач на переливания и определить универсальность одного из них.

**Гипотеза: метод бильярдного шара** является универсальным.

Для достижения поставленной цели исследования необходимо было решить следующие **задачи:**

* + 1. На основе анализа научно-методической литературы по проблеме исследования выявить все методы решения задач на переливания;
		2. Использовать все способы для решения задач такого рода;
		3. Провести анализ способов и доказать универсальность одного из способов решения задач на переливания.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы работы**:

* теоретический анализ научной и научно-популярной литературы по данному вопросу;
* анализ методов решения задач на переливания и сравнение методов по предложенным критериям;
* экспериментальная проверка и доказательство универсальности метода бильярдного шара;
* статистическая обработка результатов исследования.

**Практическая значимость** учебного проекта состоит в том, что

-обоснована универсальность метода бильярдного шара;

-разработано учебное пособие к решению задач на переливания;

-выявление универсальности метода бильярдного шара может быть использовано для повышения эффективности методики обучения решению задач на переливание в факультативном курсе по математике.

# ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

# ЗАДАЧИ НА ПЕРЕЛИВАНИЯ И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ

В жизни каждого человека встречались задачи, где было необходимо налить определенное количество жидкости, не имея нужной мерки. В такой ситуации в ход идут сосуды разной емкости. Как с помощью этих емкостей отлить нужное количество жидкости? Эти задачи решаются человеком, в основном, логически. Но есть интересный метод решения таких задач называемый методом бильярдного шара.

# Из истории вопроса

Эти задачи возникли сотни лет назад, но самая старая из существующих на данный момент – это задача из старинного тракта, она выпущена около семи веков назад (в 13 веке ).

«Господин послал своего слугу в ближайший город купить 8 мер вина. Когда слуга , выполнив поручение, собирался домой , ему повстречался другой слуга , которого господин тоже послал за вином. <сколько у тебя вина ? > - спрашивает второй слуга. < 8 мер. > , - отвечает тот. < Мне тоже нужно купить вина >. < Ты уже ничего не получишь , так как в городе больше нет вина > , - заявляет первый. Тогда второй слуга просит его поделится с ним вином и показывает ему имеющиеся при нем два сосуда , один в 5 , другой в 3 меры. Как произвести дележ при помощи этих трех сосудов? ( У каждого из слуг должно получиться по 4 меры ).

Одним из самых известных людей который создавал и решал задачи на переливание был Симеон Дени Пуасон – французский физик и математик. Его выдающиеся математические способности связывают с решение одной из задач на переливание. Говорят решив ее он и выбрал свою будущую профессию – математик

* + Задача Пуасона: некто имел сосуд , содержащий двенадцать пинт вина , и хочет подарить своему другу половину этого количества , но у него нет сосуда вместимостью в шесть пинт. Зато у его друга нашлись два сосуда; один вместимостью в восемь пинт , другой в пять пинт. Спрашивается , каким образом в сосуд вместимостью в восемь пинт влить шесть пинт вина? ( С помощью этих трех сосудов вместимостью – 12 пинт , 6 пинт , 8 пинт ).

Проследив историю бильярда и соответствующего математического метода на основе разных информационных источников, отметим следующее.

А к началу ХХ столетия игра в бильярд (катание шаров) становится в России едва ли не любимой забавой горожан. (Цит. по [11])

* Подобно тому, как азартная игра в кости вызвала к жизни «исчисление» вероятностей, игра в бильярд послужила предметом серьезных научных исследований по механике и математике. (Цит. по [9])
* Изучая проблему бильярда, ученые-математики задались ответом на вопрос, какой может быть траектория этого шарика? Поиски ответа на этот вопрос и послужили появлению теории математического бильярда или теории траекторий.
* Но математическая теория бильярдного шара была создана не сразу. Попытки исследовать математический базис бильярдной игры предпринимались неоднократно.
* Так в 1835 году французский физик Гаспар Густав Кориолис за год до избрания его академиком Парижской академии наук написал книгу "Theorie mathematique du jeu de billard" ("Математическая теория явлений бильярдной игры"). Однако работа Кориолиса, в которой автор использовал элементы теории вероятностей, теории пределов и общего анализа, не заинтересовала ни игроков, ни математиков. Лишь через 150 лет теория бильярда стала
* неотъемлемой частью аэродинамической теории и теории динамических систем, соединяя разные разделы математики.
* С 70-х годов XX столетия современная теория бильярдов в России является одним из актуальных направлений математической физики. Ее основы были заложены советским математиком Яковом Григорьевичем Синаем и его школой (**Приложение 1**).
* Методы исследования бильярдных систем (например, анализ поведения бильярдных траекторий), с одной стороны, примыкают к традиционной геометрии, а с другой — лежат на стыке отраслей современной математики — теории чисел, топологии, эргодической теории и теоретической механики. Будучи, как правило, вполне элементарными, эти методы позволяют получить далеко не элементарные и интересные выводы. В частности, оказалось, что бильярдная траектория помогает решать задачи на переливания.

# Анализ литературы по вопросу

Рассматривая научную и научно-популярную литературу по данному вопросу, можно выделить труды ученых Гальперина Г.А. и Землякова А.Н., которые рассматривали траектории движения бильярдного шара.

Из интернет источников можно выделить несколько научных статей, но ни в одной из них не рассматривается доказательство универсальности метода бильярдного шара, только упоминание или разбор задачи этим методом.

В интернете имеется презентация и работы трех школьников по данному вопросу.

В первой работе показано как используется метод бильярда на одной задаче, во второй – разобраны несколько задач этим методом, составлена программа для решения задач на переливание. В третьей работе подробно разобран метод бильярда, в основном, повторяя труды Гальперина Г.А. и Землякова А.Н. Но, ни в одной работе не была доказана универсальность метода бильярда по сравнению с другими методами.

Есть несколько познавательных сайтов предлагающих информацию о задачах на переливания или решении логических задач, где рассматривается метод бильярда при решении задач на переливание.

Итак, я изучил разные источники информации, они приведены в разделе Литература. Это и научные статьи, и научно-популярные статьи, интернет статьи, интернет сайты по решению логических задач. Познакомился с проектными работами учащихся по данному вопросу. В этих работах решено и предлагается решить несколько задач на переливание методом бильярдного шара, но ни в одной работе, статье не приведено доказательство универсальности метода бильярда.

Поэтому захотелось не просто изучить разные методы решения задач на переливание, но и доказать гипотезу «метод бильярдного шара является универсальным».

Задачи на переливания (**Приложение 5**) постоянно даются на олимпиадах 5-7 классов. Умение решать такие задачи быстро и послужило поводом создать этот проект. Олимпиадные задачи на сайте учи.ру я решал методом рассуждений. А какие же еще существуют способы решения таких задач, есть ли среди них самый простой, не требующий для решения много времени?

# Типы задач на переливание

# Задачи на переливание делятся на два типа:

# 1 тип: ,, открытое условие “ – задачи , в которых требуется получить некоторое количество жидкости с помощью нескольких пустых емкостей из бесконечного источника этой самой жидкости , из которого можно жидкость наливать , и в который можно ее выливать.

# В задачах такого типа разрешены следующие операции:

# заполнение жидкостью одного сосуда до краев;

# переливание жидкости в другой сосуд или выливание жидкости;

# Необходимо учитывать следующие замечания:

# разрешается наливать в сосуд ровно столько жидкости, сколько в нем помещается;

# разрешается переливать всю жидкость из одного сосуда в другой, если она в него вся помещается;

#  разрешается отливать из одного сосуда в другой столько жидкости, сколько необходимо, чтобы второй сосуд стал полным.

# 2 тип: ,, закрытое условие “ – задачи , в которых необходимо разделить жидкость в большей емкости с помощью нескольких меньших по объему емкостей , жидкости можно только переливать из одной емкости в другую.

# (Если не сказано ничего другого , считается , что все сосуды без делений нельзя переливать жидкость на глаз невозможно ни откуда добавлять жидкость и никуда сливать).

# Способы решения. Алгоритмы решения задач

# Каждую задачу на переливание можно решать двумя способами:

# 1 способ : начать переливать с большего сосуда;

# 2 способ: начать переливать с меньшего сосуда.

# Какой из способов рациональнее зависит от условия задачи. Изначально это определить нельзя.

# Также данные задачи можно решать – методом таблицы, методом подбора всех вариантов, а также методом математического бильярда.

# АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

# При решении задач первого типа можно использовать такой алгоритм:

# Наполнить большую емкость жидкостью из бесконечного источника.

# Перелить из большей емкости в меньшую емкость.

# Вылить жидкость из меньшей емкости.

# Повторить действия 1-3 до тех пор, пока не будет получено обозначенное в условии задачи количество жидкости.

#  При решении задач второго типа можно использовать следующий алгоритм:

# Из большей емкости наполнить емкость промежуточного объема.

# Перелить жидкость из промежуточной емкости в самую маленькую емкость.

# Перелить жидкость из самой маленькой емкости в большую емкость.

# Повторять действия 2-3 до тех пор, пока емкость промежуточного объема не станет пустой.

# Если емкость промежуточного объема опустела, то  повторить действия 1-5 до тех пор, пока не будет получено обозначенное в условии задачи количество жидкости.

# Пример решения задач первого типа: ( решим 3 задачи )

# N1 - Для марш броска солдату необходимо иметь 4 литра воды. Больше он взять не может. На базе , где имеется источник воды , есть только 5 литровые фляги и 3 литровые банки. Как с помощью одной фляги и одной банки набрать 4 литра воды во флягу.

# Будем решать методом таблицы:

#  Ответ: во фляге получилось четыре.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Фляга | 5 | 2 | 2 | 0 | 5 | 4 |
| Банка | 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 |

# N2 – Для приготовления компота маме нужно налить в 5-литровую кастрюлю 4 литра воды. Как маме справиться с этой задачей , если у мамы есть кроме этой кастрюли еще 3-литровая банка, водопроводный кран и раковина , куда можно выливать воду?

# Решение: ( решаем методом таблицы )

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Кастрюля | 0 | 3 | 5 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| Банка | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 |

#  Ответ: в кастрюле получилось 4 литра воды.

# N3 - Есть два кувшина емкостью 5л и 8л. Нужно набрать из источника 7л воды , если можно пользоваться только кувшинами.

# Решение: ( решаем методом таблицы )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8л | 0 | 5 | 5 | 8 | 0 | 2 | 2 | 7 |
| 5л | 5 | 0 | 5 | 2 | 2 | 0 | 5 | 0 |

# Ответ: В 8-литровом кувшине 7 литров воды.

# Пример решения задач второго типа: ( решим 3 задачи

# N1 - Имеются шестилитровая банка сока и две пустые банки: трех- и четырехлитровая. Как налить 1 литр сока в трехлитровую банку.

# Будем решать методом таблицы:

# Ответ: в трехлитровой банке оказался 1 литр сока.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6литров | 6 | 2 | 2 | 5 | 5 |
| 4 литра | 0 | 4 | 1 | 1 | 0 |
| 3 литра | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 |

#  N2 – двое друзей должны разделить поровну 8 ведер кваса , находящегося в большем бочонке. Помимо большего бочонка , у них есть еще два пустых бочонка , в один из которых входит 5 ведер , а в другой 3 ведра. Как с помощью этих трех бочонков , друзья разделят квас поровну?

#  Решение: ( будем решать методом таблицы )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8ведер | 5 | 5 | 2 | 2 | 7 | 7 | 4 | 4 |
| 5ведер | 0 | 3 | 3 | 5 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| 3ведра | 3 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 |

# Ответ: в 8-ведерном и 5-ведерном бочонках получилось по 4 ведра кваса.

# N3 – В первый сосуд входит 12л и он наполнен водой. Имеются еще два пустых сосуда емкостью 5л и 8л. Как разделить воду на две равные части?

#  Решение: ( будем решать методом таблицы )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12литров | 12 | 4 | 4 | 9 | 9 | 1 | 1 | 6 |
| 8литров | 0 | 8 | 3 | 3 | 0 | 8 | 6 | 6 |
| 5литров | 0 | 0 | 5 | 0 | 3 | 3 | 5 | 0 |

# Ответ: в 12-литровом и 8-литровом сосудах по 6 литров ( жидкость поделили на 2 равные части. )

# Три метода решения задач на переливание

Изучая научно-популярную литературу, я узнал, что существуют 3 способа решения логических задач на переливания:

* + - Метод рассуждений;
		- Метод таблиц;
		- Метод бильярдного шара.

Расскажу немного подробнее о каждом способе.

# Метод рассуждений

*Способ рассуждений.* Этим методом решаются самые простые

логические задачи. Но иногда задачи на переливания решаются не так быстро, а запись рассуждений может занять целый лист формата А4 в печатном виде. Так, задача, приведенная в работе Гальперина Г.А. и Землякова А.Н.

«Математические бильярды» заняла 2 страницы объяснений.

# Метод таблиц

Метод таблиц – основной прием, который используется при решении текстовых логических задач, заключается в построении таблиц. Таблицы не только позволяют наглядно представить условие задачи или ее ответ, но в значительной степени помогают делать правильные логические выводы в ходе решения задачи. Задачи на переливание решаются методом таблиц на основе того же метода рассуждений, только сопровождая рассуждения записью в таблице. Здесь также важно сразу выйти на «след» правильного решения. Решение задачи на переливания возможно двумя способами, то и таблиц должно быть две.

# 1.5. Метод бильярдного шара

К началу XX столетия бильярд становится одной и самых популярных игр между горожанами в России. Вызвав огромный ажиотаж у горожан , игра привлекла большое внимание ученых. Изучая проблему бильярда , ученые пытались понять траекторию бильярдного шара и ее возможности. Узнавая этот вопрос ученые находили все более разнообразные варианты использования траектории бильярдного шара в науках, а особенно в математике. Так французский физик Гаспар Густав Кориолик: написал книгу о математической теории бильярдной игры. Однако в то время книга не очень заинтерисовала математиков. И только спустя 150 лет его работа получила признание мирового масштаба. Но в России теория бильярдного шара в математике продвигалась Яковом Григорьевичем Синаем. И с тех метод траектории бильярдного шара активно используется и в решении задач на переливание.

Бильярдный стол можно представить в виде различных плоских фигур, окружности, эллипса, и даже в виде пространственных. Я же буду рассматривать математическую модель бильярдного шара только как горизонтальный бильярдный стол в виде параллелограмма, но без луз. По этому столу без трения движется точечный шар, абсолютно упруго отражаясь от бортов. Проходя по линиям параллелограмма по нанесенной сетке правильных треугольников, он попадает во все точки на сторонах параллелограмма (кроме точки, противоположной начальной).

В задачах на переливания горизонтальная и вертикальная сторона параллелограмма по длине означают вместимость данных двух пустых сосудов. Каждая такая точка на стороне параллелограмма имеет две координаты, что означает количество воды, налитое в каждый сосуд.

Доказана теорема Биркгофа: у бильярда в любой выпуклой области Q на плоскости, ограниченной замкнутой гладкой кривой Г, существуют периодические бильярдные траектории с любым числом звеньев.

Иными словами сказать: мы всегда решим любую задачу на переливание, обойдя весь параллелограмм от точки О, и возвратившись в точку О.

Так, используя схему бильярдного стола в виде параллелограмма (см. рис.3), можно проследить сразу два способа решения задач на переливания, имея сосуды в 3 и 5 литров: 1- налить сначала в сосуд 3 л, 2 – налить сначала в сосуд 5 л. Да еще и виден путь ответа на сразу все вопросы: как, имея пустые сосуды в 3л и 5 л, отмерить 1л, 2л,

Рисунок 3 3л, 4л, 5л, 6л, 7л?

Имея сосуды 3 л и 5 л, мы можем налить самое большое количество жидкости 5+3=8. Т.е., видим, что налить 9 л, имея сосуды в 3 л и 5 л, мы уже не сможем. Но есть другие задачи с другими начальными данными – вместимостью пустых сосудов, когда можно налить нужное количество жидкости. Поэтому необходимо каждый раз помнить условие разрешимости задач на переливание.

# ВЫВОД ПО ГЛАВЕ I.

Рассматриваемая литература приводит нас к выводу, что существуют 3 метода решения задач на переливания, из них один способ – метод бильярдного шара – указывается как универсальный, но попыток доказательства нигде в литературе не приводится. Говорят «*очевидно, что*…». И рациональность, и универсальность метода бильярдного шара раскрывается посредством разбора нескольких конкретных примеров без сравнения с тремя другими. Поэтому я решил в своем проекте в следующей главе рассмотреть доказательство универсальности метода бильярдного шара по выбранным мной критериям.

# ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ОДНОГО ИЗ СПОСОБОВ

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПЕРЕЛИВАНИЯ**

Решая задачи на переливания, я понял, что некоторые простые задачи можно решить быстро и устно, с помощью логических рассуждений, а некоторые задачи более сложные этим методом решить уже не удается. Сравнивая методы решения для одной задачи, мы покажем простоту использования метода бильярдного шара и, рассматривая круг задач, покажем универсальность этого метода, т.е. автоматизированность и применимость этого метода к любой, даже сложной, задаче на переливания.

# Решение задачи на переливание разными способами.

Решим четырьмя методами задачу, приведенную в книге Гальперина Г.А. и Землякова А Н. «Математические бильярды»: «Имеются два сосуда вместимостью 5 и 8 литров и большая бочка, наполненная водой. Как с помощью этих двух сосудов отмерить ровно 2 литра воды?»

Методом рассуждений решал задачу практически 20 минут, подробно расписывая все ветви рассуждений в таблицу.2 способа решения задачи разделил основной вертикальной чертой:

1 способ – можно налить сначала в пятилитровую емкость; 2 способ – можно налить в 8 литровую емкость.

Оформление рассуждений заняло почти один лист формата А4 (**Приложение 2**).Рассуждение сопровождалось заполнением следующей таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ходы** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
| **8 л** | 0 | 5 | 5 | 8 | 0 | 2 | 2 | 7 |
| **5л** | 5 | 0 | 5 | 2 | 2 | 0 | 5 | 0 |

Методом бильярда задача была решена быстро, решение задачи с помощью макета занимает не больше минуты (не считая пояснений). Рисунок 5

Проведем анализ каждого способа решения задачи по следующим 6 критериям:

# На решение задачи требуется мало времени.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методрассуждений | Метод таблиц | Метод бильярдного шара |
| Подчас требует много времени | В начале изучения требует достаточно много времени | Решение автоматизировано, поэтому не требует много времени |

* + 1. **Метод может использовать любой человек**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методрассуждений | Метод таблиц | Метод бильярдного шара |
| Может рассуждать любой человек | Оформлять рассуждение в виде таблиц может любой человек | Использовать метод может даже не посвященный в математику |

* + 1. **Простой и понятный**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методрассуждений | Метод таблиц | Метод бильярдного шара |
| нет | Не совсем | Да |

* + 1. **Использование графической схемы (наглядность)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Метод рассуждений | Метод таблиц | Метод бильярдного шара |
| Нет | Да | Да |
| Лучше параллельновести таблицу |  |  |

* + 1. **Возможность проследить сразу два способа решения задачи**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методрассуждений | Метод таблиц | Метод бильярдного шара |
| Нет | Да | Да |

* + 1. **Возможность создать макет для решения задач на переливание с разными параметрами, что в свою очередь сократит временные затраты на решение задачи.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Метод рассуждений | Метод таблиц | Метод бильярдного шара |
| Макета не построишь | Макетом является любой лист в клеточку | Можно создать макет - карточки с изображенным ромбическим бильярдным столом размерами 11 на 13 |

Проведем сравнение методов по выбранным критериям и установим универсальность одного из методов, при условии отображения результатов анализа каждого способа по выбранным критериям следующим образом:

++ - если совершенно выдержан;

+ - если критерий выдержан;

+- - если критерий выдержат, но не совсем;

- - если критерий не выдержан.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Методрассуждений | Методтаблиц | Методбильярдного шара |
| Минимум временных затрат | - | -+ | ++ |
| Является ли субъектом использования метода любойчеловек | + | + | ++ |
| Простой и понятный | - | +- | + |
| Использование графической схемы | - | + | + |
| Возможность проследить сразу два способа решениязадачи | - | + | + |
| Возможность создать макетдля решения задач | - | + | + |

Результат сравнения методов по выбранным параметрам показывает очевидность универсальности метода бильярдного шара. Но для проверки

своих предположений необходимо провести исследования на большем массиве данных.

# Подтверждение универсальности метода бильярдного шара

Поверка предположений универсальности метода бильярдного шара была подтверждена на основе оценки всех методов решения задач на переливание учащимися 5 класса (29 школьников).

На кружковых занятиях учащиеся 5 класса были ознакомлены со всеми способами решения задачи на переливания. На последнем занятии кружка было предложено решить типичную задачу на переливание тремя способами и провести анализ способов по выбранным мной ранее шести критериям (**Приложение 3**). Данные предпочтений учащихся я занес в таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1. Метод рассуждений | 2.Метод таблиц | 3.Метод бильярдного шара |
| Занимает маловремени | 9 | 12 | 18 |
| Может ли использоватьлюбой человек | 13 | 8 | 20 |
| Простой ипонятный | 9 | 8 | 18 |
| Использование графической схемы(наглядность) | 2 | 13 | 19 |
| Возможность проследить сразу два способарешения задачи | 18 | 14 | 17 |
| Возможность создать макет длярешения задач | 3 | 19 | 21 |
| ВСЕГОГОЛОСОВ (ЧАСТОТ) | 54 | 74 | 113 |

Очевидно, что метод бильярдного шара универсальный (ему отдано 113 голосов), но очевидность не достаточна для доказательства универсальности. Универсальность метода нужно доказать статистическими методами.

# ВЫВОД ПО ГЛАВЕ II.

Итак, решение нескольких задач тремя способами действительно подтвердило мнение об универсальности метода бильярдного шара.

Проведен анализ трех методов решения задач на переливания по выбранным мной 6 критериям.

Мое предположение об универсальности метода бильярдного шара прошло проверку в форме анкетирования учащихся 5 класса, которые провели анализ всех методов по тем же 6 критериям.

Проведенный анализ предпочтений учащихся способов решения задачи на переливания также свидетельствовал об очевидности универсальности метода бильярдного шара.

Одним из статистических методов доказана достоверность исследования, т.е. доказана универсальность метода бильярдного шара.

Мне и учащимся 5 классов действительно понравился способ решения задач на переливания методом бильярдного шара. Им мы решаем задачи быстрее и продуктивнее

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатом проекта является **доказательство** гипотезы об универсальности метода бильярдного шара для решения задач на переливания одним из методов статистической обработки данных анкетирования. Цель исследования достигнута, исследования проведены, все поставленные задачи выполнены.

Выявлена **практическая значимость проекта,** которая заключается в использовании простого приема для решения практических задач на переливания, на пересыпание как в жизни, так и в учебном процессе в рамках факультативных занятий по математике в 5 классе, при подготовке к олимпиадам. Созданный макет бильярдного стола оформлен как учебное пособие для решения задач подобного рода (**Приложение 5**). Он помогал мне и поможет учащимся в дальнейшем решать различные задачи на переливания быстро и многократно.

Знание метода бильярдного шара поможет даже не посвященным в математику, тем, кто работает с растворами, сыпучими веществами и др.(домохозяйкам, в аптечном производстве, в строительстве, в сельском хозяйстве).

И, если бы знали Брюс Уиллис и его напарник метод бильярдного шара, они явно бы использовали данный метод для решения той задачи, которую задал им преступник в фильме «Крепкий орешек 3».

Как и где применяется метод бильярдного шара в других областях математики – об этом я **решил узнать** в 8-10 классах и поближе с ним познокомится.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Бильярд.//Мифы или реальность (сайт).-URL:http://www.molomo.ru;
2. Гальперин Г.А. Бильярды //Квант.- 1981.- №4.-С.34-37.
3. Гальперин Г.А. Периодические движения бильярдного шара// Квант.- 1989.-

№ 3.С.8-15.

1. Гальперин Г.А., Земляков А.Н. Математические бильярды. (Бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики).– М.: Наука, 1990.-288 с.-(«Библиотечка «Квант». Выпуск 77).ISBN 5-02-014080-5.
2. Глухова О.Ю. Система нестандартных задач по математике, приемы и методы решения.// НПК ученых и студентов с дистанционным участием. Коллективные монографии.-URL:<http://www.sibac.info/sibac.info/2009-07-01-> 10-21-16/10116-
3. Земляков А.Н. Арифметика и геометрия столкновений // Квант.-1978.- №4- С.14-16.
4. Интернет библиотека МЦНМО.-URL:http://www.ilib.mccme.ru;
5. Интевики (образовательный портал сообщества). - URL:[http://www.wiki.iteach.ru](http://www.wiki.iteach.ru/)
6. Попов О.А. Критерий Хи-квадрат.//Статистика в психологии и педагогике(сайт).-URL:[http://www.psystat.at.uaПедагогический](http://www.psystat.at.uaПедагогический/) клуб «Наука и творчество» (сайт)- URL:<http://www.sites.google.com/site/klybnayka/>
7. Решение задач на переливание методом бильярдного шара (презентация)//MyShared (база презентаций). – URL:.<http://www.myshared.ru/slide/216701/>
8. Решение задач на переливание методом бильярдного шара (исследовательская работа по информатике)//Официальный сайт МОУ СОШ№7 г. Копейска.-URL:[http://www.school-7.ucoz.com.](http://www.school-7.ucoz.com/)
9. Решение задач на переливание на бильярдном столе (реферат)// РЕФ.РФ. Единый реферат-центр России и СНГ.- URL:[http://WWW.referatwork.ru/new/source/80926text-80926.html.](http://WWW.referatwork.ru/new/source/80926text-80926.html)
10. Учимся решать логические задачи (cайт).- URL:[http://www.logika.vobrazovanie.ru](http://www.logika.vobrazovanie.ru/)
11. Шатова Н.Д. Логические задачи как средство развития рефлексивной деятельности учащихся 5-6 кл. при обучении математике//Библиотека авторефератов и диссертаций по педагогике.-URL:[http://nauka-](http://nauka-/) pedagogika.com/pedagogika-13-00-02/dissertaciya-logicheskie-zadachi-kak- sredstvo-razvitiya-refleksivnoy-deyatelnosti-uchaschihsya-5-6-klassov-pri- obuchenii-matematike#ixzz3Px5QtLHI

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**Синай Яков Григорьевич**



Синай Я.Г. (д.р.1935 г.) - доктор физико-математических наук, академик РАН, действительный член Американского математического общества, работает в России и Америке, в 2014 году получил премию Абеля за фундаментальный вклад в изучение динамических систем и др.

Синай Я.Г., ученик Колмогорова А.Н., родился в 1935 году в Москве, закончил физмат МГУ, по настоящее время ведет плодотворную творческую работу и в России, и в Америке.

В 2014 году Яков Григорьевич получил премию Абеля за фундаментальный вклад в изучении динамических систем. Его ученик Земляков А.Н. вместе с Гальпериным Г.А., учеником Колмогорова А.Н., в 1990 году написали книгу «Математические бильярды», которая лежит в основе каждой работы по исследованию математической теории бильярдов. Эта работа прояснила и мне что такое метод бильярдного шара.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 2

|  |
| --- |
| **МЕТОД РАССУЖДЕНИЙ** |
| НАЛИТЬ В 5 ЛИТРОВУЮ ЕМКОСТЬ | НАЛИТЬ В 8 ЛИТРОВУЮ ЕМКОСТЬ |
| Вылить | Оставить 5 | Перелить в большой | Вылить | Оставить | Перелить в 5 литровую ёмкость |
| зачем? | литров и | **0-5** | зачем? | 8 литров | **3-5** |
|  | налить 8 | Налить в маленькую 5 |  | и | Вылить из 5 литрового |
|  | литров в | литров |  | заполнить | **3-0** |
|  | большую | **5-5** |  | 5 | Перелить из 8 литровой 3 литра |
|  | ёмкость | Из маленькой перелить |  | литровую | в 5 литровую |
|  | **5-8** | в большую емкость |  | емкость | **0-3** |
|  | Вылить- | **2-8** |  | **8-5** | Наполнить 8литровую ёмкость |
|  | зачем? | Из большой емкости |  | Вылить- | **8-3** |
|  |  | вылить |  | зачем? | Перелить из 8 литровой ёмкости |
|  |  | **2-0** |  | Перелить | 2 литра в 5литровую ёмкость |
|  |  | Из маленькой емкости |  | из 8 | **6-5** |
|  |  | перелить в большую |  | литровой | Вылить из 5 литровой ёмкости |
|  |  | **0-2** |  | ёмкости 4 | всю воду |
|  |  | В маленькую ёмкость |  | литра в 5 | **6-0** |
|  |  | налить 5литров |  | литровую | Перелить из 8 литровой ёмкости |
|  |  | **5-2** |  | ёмкость | 5литров в 5 литровую ёмкость |
|  |  |  |  |  | **1-5** |
|  |  | Из маленькой емкости |  |  | Вылить из 5 литровой ёмкости |
|  |  | перелить в большую |  |  | всю воду |
|  |  | **0-7** |  |  | **1-0** |
|  |  |  |  |  | Перелить из 8 литровой ёмкости |
|  |  |  |  |  | 1литр в 5 литровую ёмкость |
|  |  |  |  |  | **0-1** |
|  |  |  |  |  | Наполнить 8 литровую ёмкость |
|  |  |  |  |  | водой |
|  |  |  |  |  | **8-1** |
|  |  |  |  |  | Перелить из 8 литровой ёмкости |
|  |  |  |  |  | 4 литра в 5 литровую ёмкость |
|  |  |  |  |  | **4-5** |
|  |  |  |  |  | Вылить из 5 литровой ёмкости |
|  |  |  |  |  | всю воду |
|  |  |  |  |  | **4-0** |
|  |  |  |  |  | Перелить из 8 литровой ёмкости |
|  |  |  |  |  | 4литра в 5 литровую ёмкость |
|  |  |  |  |  | **0-4** |
|  |  |  |  |  | Наполнить 8литровую ёмкость |
|  |  |  |  |  | **8-4** |
|  |  |  |  |  | Перелить из 8 литровой ёмкости |
|  |  |  |  |  | 1литр в 5 литровую ёмкость |
|  |  |  |  |  | **7-5** |
|  |  |  |  |  | Вылить из 5 литровой ёмкости |
|  |  |  |  |  | всю воду |
|  |  |  |  |  | **7-0** |
|  |  |  |  |  | **Задача решена.** |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 3

**Создан макет бильярдного стола**

1. сторона



1. сторона



# ПРИЛОЖЕНИЕ 4

# Задачи на переливание в впр и в олимпиадах особо не отличаются от обычных задач , но в таких задача задачах как правило более сложное условие и больше сосудов. Такие задачи называют – задачи со звездочкой. ( Более усложненные)

# 1) Имеются два сосуда: один объемом 4 литра, а другой объемом 9 литров. Получится ли их помощью налить из озера ровно 6 литров воды? Разрешается переливать всю воду из одного сосуда в другой и выливать воду из любого из них обратно в озеро.

Задачи

2) Богатырь подошел к реке с двумя ведрами, вмещающими 15 литров и 16 литров. Удастся ли ему налить (отмерить) при помощи этих ведер ровно 8 литров вод ы?

3) Молочница принесла молоко в восьмилитровом ведре, а у бабушки имеется только одна трехлитровая банка и одно четырехлитровое ведро. Как ей взять у молочницы 5 литра молока?

4) Отлейте из бочки ровно 13 литра кваса при помощи двух бидонов: один емкостью 17 литров, а другой емкостью 5 литров.

5) Бочка вмещает 12 ведер воды. Для полива с вечера ее наполнили до верху. Имеются две пустые бочки, вмещающие 5 ведер и 8 ведер воды. Разлейте содержимое бочки поровну.

Решим первую задачу: ( будем решать методом таблицы )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9л | 9 | 5 | 5 | 1 | 1 | 0 | 9 | 6 |
| 4л | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 1 | 1 | 4 |

Ответ: в 9-литровом сосуде оказалось 6 литров.

Решим вторую задачу: ( будем решать методом таблицы )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16л | 16 | 1 | 1 | 0 | 16 | 2 | 2 | 0 | 16 | 3 | 3 | 0 | 16 | 4 | 4 | 0 | 16 | 5 | 5 | 0 | 16 | 6 | 6 | 0 | 16 | 7 |  |  |  |
| 15л | 0 | 15 | 0 | 1 | 1 | 15 | 0 | 2 | 2 | 15 | 0 | 3 | 3 | 15 | 0 | 4 | 4 | 11 | 0 | 5 | 5 | 15 | 0 | 6 | 6 | 15 |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 7 | 7 | 0 | 16 | 8 |
| 15 | 0 | 7 | 7 | 15 |

Ответ: в 16-литровом ведре оказалось 8 литров воды.

Решим третью задачу: ( решаем методом таблицы )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8л | 8 | 4 | 4 | 7 | 4 | 4 | 7 | 7 | 3 | 3 | 5 |
| 4л | 0 | 4 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 0 | 4 | 2 | 0 |
| 3л | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 3 | 3 |

Ответ: в 8-литровом сосуде оказалось 5 литров молока.

Решим четвертую задачу: (решим методом таблицы )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 17л | 17 | 12 | 12 | 7 | 7 | 5 | 0 | 17 | 14 | 14 | 9 | 9 | 4 | 4 | 0 | 17 | 16 | 16 | 11 | 11 | 6 | 6 | 1 | 1 | 0 | 17 |
| 5л | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 2 | 2 | 2 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 4 | 4 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 1 | 1 |
| 17л | 13 |
| 5л | 5 |

Ответ: в 17-литровом сосуде оказалось 13 литров кваса.

Решим пятую задачу: ( решаем методом таблицы )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12л | 12 | 4 | 4 | 9 | 9 | 1 | 1 | 6 |
| 8л | 0 | 8 | 3 | 3 | 0 | 8 | 6 | 6 |
| 5л | 0 | 0 | 5 | 0 | 3 | 3 | 5 | 0 |

Ответ: в 12 и 8-литровых сосудах оказалось по 6 литров воды.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 5

**Понятие задачи на переливание**

В математической среде имеется договоренность, какие задачи считать задачами на переливание и какие требования при решении их предъявляются.

Во-первых, в задачах на переливания требуется указать последовательность действий, при которой осуществляется требуемое переливание (указано сколько отлить вещества) и выполнены все условия задачи (какие имеются сосуды с веществами). Если не сказано ничего другого, считается, что

* + все сосуды без делений;
	+ нельзя переливать жидкости "на глаз";
	+ невозможно ниоткуда добавлять жидкости и никуда сливать.

Во-вторых, мы можем точно сказать, сколько жидкости в сосуде, только в следующих случаях:

1. знаем, что сосуд пуст,
2. знаем, что сосуд полон, а в задаче дана его вместимость,
3. в задаче дано, сколько жидкости в сосуде, а переливания с использованием этого сосуда не проводились
4. в переливании участвовали два сосуда, в каждом из которых известно, сколько было жидкости, и после переливания вся жидкость поместилась в один из них;
5. в переливании участвовали два сосуда, в каждом из которых известно, сколько было жидкости, известна вместимость того сосуда, в который переливали, и известно, что вся жидкость в него не поместилась: мы можем найти, сколько ее осталось в другом сосуде.