Муниципальное общеобразовательное учреждение

Средняя общеобразовательная школа № 2 г. Вяземский

Вяземского муниципального района Хабаровского края

**Районная научно-практическая конференция**

**«Шаг в науку»**

**Секция «Естественно-научная»**

**«Комплексные числа и их приложения»**

Исследовательская работа

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выполнил: Котов Михаил, ученик 11 классаРуководители:Палтусова Евгения Николаевна, учитель математикиПалтусов Алексей Дмитриевич, учитель физики |

г. Вяземский

2021 год

**Содержание**

[**ВВЕДЕНИЕ 3**](#_Toc66970256)

[**1. Теоретическая часть 3**](#_Toc66970257)

[**1.1. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ УЧЕНИЯ О КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ 3**](#_Toc66970258)

[**1.2 ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ 6**](#_Toc66970259)

[**2. Практическая часть 9**](#_Toc66970260)

[**2.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 9**](#_Toc66970261)

[**2.2. ГЕОМЕТРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ 10**](#_Toc66970262)

[**2.3. ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА 12**](#_Toc66970263)

[**2.4. Применение «Комплексных чисел в физике» 14**](#_Toc66970264)

[**ЗАКЛЮЧЕНИЕ 17**](#_Toc66970265)

[**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 18**](#_Toc66970266)

# ВВЕДЕНИЕ

Впервые я узнал о комплексных числах при подготовке к Единому Государственному Экзамену по физике, натолкнулся на задачу: «Действующие значения напряжения и тока потребителя электрической энергии в комплексной форме изображаются в виде:

 В и А. Запишите выражения для мгновенных значений тока и напряжений при частоте , определите в комплексной форме полное сопротивление.»

При решении этой задачи, требовалось найти комплексные значения напряжения, тока и полное сопротивление.

Я заинтересовался данной темой и решил узнать о комплексных числах побольше, где они находят применение в математике и физике.

Объект исследования: комплексные числа.

Предмет исследования: приложение комплексных чисел в физике.

Моей целью являлось изучение комплексных чисел как раздела математики.

В ходе исследования была выдвинута гипотеза, задачи по электродинамике можно решать, применяя комплексные числа.

# Теоретическая часть

# ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ УЧЕНИЯ О КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ

Для решения алгебраических уравнений недостаточно действительных чисел. Поэтому естественно стремление сделать эти уравнения разрешимыми, что в свою очередь приводит к расширению понятия числа. Например, для того чтобы любое уравнение х + a = b имело корни, положительных чисел недостаточно и поэтому возникает потребность ввести отрицательные числа и нуль.

Древнегреческие математики считали, что, a = с и b = a только натуральные числа, но в практических расчетах за два тысячелетия до нашей эры в Древнем Египте и Древнем Вавилоне уже применялись дроби. Следующим важным этапом в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел – это было сделано китайскими математиками за 2 века до нашей эры.

Отрицательные числа применял в III веке нашей эры древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действий над ними, а в VII веке нашей эры эти числа подробно изучили индийские ученые, которые сравнивали такие числа с долгом. С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменение величин. Уже в VIII веке нашей эры было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значение – положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратные корни извлечь нельзя: нет такого числа х, чтобы х2 = – 9. В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В формуле для решения кубических уравнений содержатся кубические и квадратные корни. Эта формула безотказно действует в случае, когда уравнение имеет один действительный корень (например, для уравнения х3 + 3х – 4 = 0), а если оно имело 3 действительных корня (например, х3 – 7х + 6 = 0), то под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число. Получалось, что путь к этим 3 корням уравнения ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа.

Чтобы объяснить получившийся парадокс, итальянский алгебраист Джироламо Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений



не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решение всегда

х = 5 ±, у = 5 ±,

нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать, что

∙ **=** – *a*.

Карданоназывалтакие величины«чистоотрицательными» и даже «софистически отрицательными», считая их бесполезными, и стремился не применять их.

В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение этой величины. Но уже в 1572 г. вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Название «мнимые числа» ввел в 1637 г. французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 г. один из крупнейших математиков XVIII века Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова imaginaire («мнимый») для обозначения (мнимой единицы**)**, т.е. *i* = , этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу (1831 г).

В течение XVII века продолжалось обсуждение арифметической природы мнимостей, возможности дать им геометрическое истолкование. Постепенно развивалась техника операций над комплексными числами. На рубеже XVII – XVIII веков была построена общая теория корней **n**-й степени сначала из отрицательных, а впоследствии и из любых комплексных чисел.

В конце XVIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью комплексных чисел научились выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянным коэффициентом. Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний материальной точки в сопротивляющейся среде.

Я. Бернулли применил комплексные числа для вычисления интегралов. Хотя в течение XVIII века с помощью комплексных чисел были решены многие вопросы, в том числе и прикладные задачи, связанные с картографией, гидродинамикой и т. д., однако еще не было строго логического обоснования теории этих чисел. Поэтому французский ученый П. Лаплас считал, что результаты, получаемые с помощью мнимых чисел, - только наведение, приобретающие характер настоящих истин лишь после подтверждения прямыми доказательствами. В конце XVIII – начале XIX веков было получено геометрическое истолкование комплексных чисел. Датчанин Г. Вессель, француз Ж. Арган и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изображать комплексное число *z = a + bi* точкой М (a, b) на координатной плоскости. Позднее оказалось, что еще удобнее изображать число не самой точкой М, а вектором ОМ, идущим в эту точку из начала координат. При таком истолковании сложению и вычитанию комплексных чисел соответствуют эти же операции над векторами.

 Геометрические истолкования комплексных чисел позволили определить многие понятия, связанные с функциями комплексного переменного, расширило область их применения. Стало ясно, что комплексные числа полезны во многих вопросах, где имеют дело с величинами, которые изображаются векторами на плоскости: при изучении течения жидкости, задач теории упругости, в теоретической электротехнике.

 Большой вклад в развитие теории функций комплексной переменной внесли русские и советские ученые: Р.И. Мусхелишвили занимался ее приложениями к теории упругости, М.В. Келдыш и М.А. Лаврентьев – к аэродинамике и гидродинамике, Н. Н. Боголюбов и В.С. Владимиров – к проблемам квантовой теории поля.

# 1.2 ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

 Я рассмотрел решение квадратного уравнения *х2 + 1 = 0*. Отсюда *х2 = –1*. Число х, квадрат которого равен –1, называется мнимой единицей и обозначается *i.* Таким образом, *i2 = –1*, откуда *i =*. Решение квадратного уравнения, например, *х2 – 8х + 25 = 0*, можно записать следующим образом: *х = 4 = 4   = 4 ± = 4 3 = 4 ± 3i.*

 Числа вида *4 + 3i* и *4 – 3i* называют комплексными числами. В общем виде комплексное число записывается *a + bi*, где *a* и *b* – действительные числа, а *i* – мнимая единица. Число ***a*** называется действительной частью комплексного числа (Re, от фр. réele – «реальный», «действительный»), ***bi*** – мнимой частью этого числа (Im, от фр. imaginaire – «мнимый»), ***b* –** коэффициентом мнимой части комплексного числа.

Комплексные числа равны, если равны их действительные части и коэффициенты мнимых частей:

*a + bi = c + di*, если a = c, b = d.

Комплексное число равно нулю тогда, когда его действительная часть и коэффициент мнимой части равны нулю, т.е.

*z = a + bi = 0*, если a = 0, b = 0.

Действительные числа являются частным случаем комплексных чисел.

Если *b = 0*, то

*a + bi = a* – действительное число.

Если *a = 0*, *b ≠ 0*, то

*a + bi = bi* – чисто мнимое число.

Также на множестве комплексных чисел теряются понятия «больше» и «меньше», можно лишь по отдельности сравнивать действительные и мнимые части комплексных чисел.

**Комплексно-сопряжённые числа.** Сопряжёнными числами называют числа, действительные части которых равны, а мнимые отличаются знаком. Сопряжённое комплексному числу z обозначают z.

Произведением и суммой сопряжённых чисел являются действительные числа:

*(a + bi) + (a – bi) = 2a,*

*(a + bi) ∙ (a – bi) = a2 + b2*.

Позже, когда была предложена геометрическая интерпретация комплексных чисел, возникла необходимость введения нового понятия – длины вектора, соответствующего комплексному числу. Его стали называть модулем комплексного числа и обозначать:



по предложению швейцарского математика Жана Аргана.

Самостоятельно изучив пример , я пришёл к выводу, что и сумма корней двух сопряжённых чисел равна действительному числу. Действительно, обозначив конечный результат за *x* и учитывая, что обе части неотрицательны, я имею право возвести выражение в квадрат:



Раскрыв скобки и выполнив возможные действия в левой части, я получил:

. Т.е. 

Так как *a* и *b* – действительные числа, то и это выражение будет действительным. Я доказал это на примере:

. Возведя в квадрат, я получил:

.

Т.е. =.



**Сложение комплексных чисел.** Суммой двух комплексных чисел

*z1 = a + bi* и *z2 = c + di*

называется комплексное число

*z = (a + c) + (b + d)i.*

Для комплексных чисел справедливы переместительный и сочетательный законы сложения. Их справедливость следует из того, что сложение комплексных чисел по существу сводится к сложению действительных частей и коэффициентов мнимых частей, а они являются действительными числами, для которых справедливы указанные законы.

**Вычитание комплексных чисел** определяется как действие, обратное сложению: разностью двух комплексных чисел

*a + bi* и *c + di*

называется комплексное число

*х + yi,*

которое в сумме с вычитаемым дает уменьшаемое. Отсюда, исходя из определения сложения и равенства комплексных чисел, получим два уравнения, из которых найдем, что

*х = a – c, у = b – d.*

Значит,

*(a + bi) – (c + di) = (a – c) + (b – d)i.*

**Произведение комплексных чисел**

*z1 = a + bi* и *z2 = c + di*

называется комплексное число

*z = (ac – bd) + (ad + bc)i*,

*z1z2 = (a + bi) ∙ (c + di) = (ac – bd) + (ad + bc) i.*

Легко проверить, что умножение комплексных чисел можно выполнять как умножение многочленов с заменой *i2* на *–1*. Для умножения комплексных чисел также справедливы переместительный и сочетательный законы, а также распределительный закон умножения по отношению к сложению.

**Деление комплексных чисел,** кроме деления на нуль, определяется как действие, обратное умножению. Конкретное правило деления получим, записав частное в виде дроби и умножив числитель и знаменатель этой дроби на число, сопряженное со знаменателем:



Или короче:

.

**Степень числа i** является периодической функцией с периодом 4. Мы доказали это утверждение:

*i3 = i2 ∙ i = (– 1) i = – i;*

*i4 = i3 ∙ i = (– i) i = – i2 = – (– 1) = 1;*

*i5 = i4 ∙ i = 1 ∙ i = i; i6 = i5 ∙ i = i ∙ i = – 1.*

Вообще,

*i4n + k = (i4)n ∙ ik = 1n ∙ ik.*

# Практическая часть

# РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Сначала я рассмотрел простейшее квадратное уравнение z2 = a, где a – заданное число, z – неизвестное. На множестве действительных чисел это уравнение:

1) имеет один корень z = 0, если a = 0;

2) имеет два действительных корня z1,2 = ±, если a > 0;

3) не имеет действительных корней, если *a <0*;

4) на множестве комплексных чисел это уравнение всегда имеет корень.

**Вообще уравнение *z2 = a*, где a < 0 имеет два комплексных корня: *z1,2 =±i.***

 Используя равенство *i2 = –1*, квадратные корни из отрицательных чисел принято записывать так: *= i, = i= 2i, = i.*

Итак,  определен для любого действительного числа a (положительного, отрицательного и нуля). Поэтому любое квадратное уравнение

*az2 + bz + c = 0*, где a, b, с – действительные числа, *a ≠ 0*, имеет корни. Эти корни находятся по известной формуле:

*z1, 2 =.*

Также справедливо утверждение, что любое уравнение степени *n* имеет ровно *n* корней, при этом среди них могут быть одинаковые и комплексные.

Невозможно не рассмотреть одну из красивейших формул математики – формулу Кардано для вычисления корней кубического уравнения вида *x3 + px + q = 0*:

**.

По-видимому, эту же формулу ранее получили Сцепион дель Ферро и Николо Фонтане (Тарталья), но первым опубликовал эту формулу именно Кардано.

# ГЕОМЕТРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Наглядно представить мнимые числа пытались ещё в XVIII веке.

В 1799 г. датский математик Каспар Вессель предложил простую геометрическую интерпретацию комплексных чисел, однако его работа осталась незамеченной. В 1806 г. швейцарец Жан Агран высказал похожую идею. Но широкое распространение эта интерпретация получила лишь через три десятка лет, когда Карл Фридрих Гаусс выпустил в свет труд «Теория биквадратных вычетов», в котором дал такое же геометрическое изображение комплексных чисел, как Вессель и Агран. Больше всего меня поразило то, что практически одновременно, независимо друг от друга трое учёных предложили одну и ту же идею. Это говорит о том, что идея буквально витала в воздухе. Вообще, именно это открытие способствовало дальнейшему развитию учения о комплексных числах: стала возможна тригонометрическая запись числа, и, как следствие, намного удобнее стали возведение в степень и извлечение корня.

Точками на числовой оси можно представлять, как действительные, так и мнимые числа (но только не на одной и той же оси). Значит, чтобы одновременно изобразить действительные и мнимые числа нужно взять сразу две оси. Назовём их действительной осью и мнимой осью и расположим перпендикулярно. Для определённости выберем положительное направление действительной оси вправо, а мнимой – вверх.

Теперь можно наглядно представить операции сложения и вычитания комплексных чисел с помощью векторов.

y

M

O

x

*φ = arg z*

*a*

*b*

**Аргумент комплексного числа.** Когда я изображал комплексно-сопряжённые числа как вектора, возникла неопределённость, так как углы между соответствующими сопряжённым числам векторами равны. Во избежание этой неопределённости необходимо ввести понятие направления измерения угла и как следствие – отрицательные углы. Направление от положительной полуоси против часовой стрелки значение угла принято считать положительным, а против – отрицательным. Этот угол называют аргументом комплексного числа и обозначают так: *φ = arg z*. Обычно он измеряется не в градусах, а в радианах. Но и аргумент не полностью устраняет неопределённость. Выходит, если *φ* – аргумент комплексного числа, то и *φ + 2πk (k = 0, ±1, ±2, …).* Но эту неопределённость устранять не стоит (она понадобилась мне для извлечения корня из комплексного числа).

**Модуль комплексного числа.** Я заметил одну интересную закономерность. Если каждое действительное число имеет только одно число с таким же модулем, то комплексные числа имеют бесконечное множество чисел с одинаковым модулем. Действительно, если взять точку M, соответствующую числу *z = a + bi* на координатной плоскости, провести к ней радиус-вектор, а потом провести окружность радиуса |z| = с центром в точке O, то будет видно, что все числа, имеющие такой же модуль |z| =, будут лежать на этой окружности.

**Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.**

y

M

O

x

|z|

|z|

|z|

y

M

O

x

φ = arg z

a

b

N

Я взял произвольное комплексное число *z = a + bi* и изобразил его в виде радиус-вектора  на комплексной плоскости. Пусть N – проекция точки M на действительную ось. В прямоугольном треугольнике OMN длины катетов ON и OM равны соответственно a и b, а длина гипотенузы OM равна. Из тригонометрии известно, что отношение длины катета к длине гипотенузы равняется косинусу прилежащего угла и синусу противолежащего. Следовательно,

*a = Re z = | z | ∙ cos φ,*

*b = Im z = | z | ∙ sin φ*,

где φ – аргумент комплексного числа z. Таким образом,

*z = a + bi = | z | ∙ cos φ + | z | ∙ sin φ ∙ i = | z | ∙ (cos φ + i sin φ).*

Произведение двух комплексных чисел *z1 = | z1 | ∙ (cos φ1 + i sin φ1)* и

*z2 = | z2 | ∙ (cos φ2 + i sin φ2)* будет равно:

*z1 ∙ z2 = | z1 | | z2 | (cos φ1 + i sin φ1) (cos φ2 + i sin φ2) =*

*= | z1 | | z2 | ((cos φ1 cos φ2 – sin φ1 sin φ2) + i (sin φ1 cos φ2 + cos φ1 sin φ2)) =*

*= | z1 | | z2 | (cos (φ1 + φ2) + i sin (φ1 + φ2)).*

**При умножении комплексных чисел их модули необходимо перемножить, а аргументы – сложить.**

**При делении необходимо произвести обратные операции: поделить модули и вычесть аргументы.**

# ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Я возвёл комплексное число z = r ∙ (cos φ + i sin φ) в степень n:

*zn = rn (cos nφ + i sin nφ).*

Это выражение назвали формулой Муавра – в честь английского математика Абрахама де Муавра, открывшего её в 1701 г.

При n = 1, я получил *zn = rn (cosφ + i sinφ)n = rn (cos nφ + i sin nφ).*

То есть

*rn (cosφ + i sinφ)n = rn (cos nφ + i sin nφ)*,

или, если разделить на rn ≠ 0:

*(cosφ + i sinφ)n = (cos nφ + i sin nφ).*

Этой формулой можно воспользоваться для выражения синусов и косинусов аргумента *nφ* через синусы и косинусы аргумента *φ*. Для этого я применил к левой части формулу бинома Ньютона и учёл формулы для степеней числа *i*. Получается, что



Отсюда следуют равенства





Суммирование ведётся до тех пор, пока показатель при cos φ не обратится в 0 или в 1 (в зависимости от чётности n). Поскольку в выражение для *cos nφ* входят лишь чётные степени *sin φ*, то их можно выразить лишь через *cos φ*. Для *sin nφ* при нечётном *n* можно получить выражение лишь через *sin φ*, а при чётном *n* – в виде произведения *cos φ* на выражение от *sin φ*.

**Извлечение корня из комплексного числа.**

Как и для действительных чисел, корнем n-й степени из комплексного числа ***z***, где *n* – натуральное число, называют такое комплексное число w, что *wn = z*. Корень n-й степени из z обозначают. Я приведу доказательство, что из любого комплексного числа z можно извлечь корень n-й степени, причём если z ≠ 0, то  принимает n различных значений.

Я записывал числа в тригонометрической форме.

Пусть

*z = r (cos φ1 + i sin φ1).*

Число w я искал в виде

*w = R (cos φ2 + i sin φ2).*

Равенство wn = z принимает вид:

*Rn (cos nφ2 + i sin nφ2) = r (cos φ1 + i sin φ1).*

Но два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются лишь слагаемым, кратным 2π. Значит,

*Rn = r,*

*nφ = φ + 2πk, kZ.*

Итак, для модуля R искомого числа я получил определённое значение. Что же касается аргумента φ этого числа, он может принимать различные значения в зависимости от значения числа k. Я выяснил, при каких значениях k1 и k2 получаются значения φ, отличающиеся друг от друга на кратное 2π (т. е. одинаковые значения w).

Для этого разность



должна быть кратна 2π. Это имеет место тогда и только тогда, когда k1 – k2 делится на n. Отсюда следует, что при r ≠ 0 значениям *k = 0, 1, …, n – 1* соответствуют различные значения корня, а *k = n* даёт то же значение корня, что и при *k = 1* и т. д. Число различных значений корня равно n.

Таким образом, я доказал утверждение:

 **Теорема.** Для любого натурального числа n и любого отличного от нуля комплексного числа z существуют n различных значений корня n-й степени.

 Если

*z = r (cos φ + i sin φ),*

то эти значения выражаются формулой

,

где k = 0, 1, …, n – 1.

 Все точки wk лежат на окружности радиусом  с центром в начале координат. Аргументы соседних точек отличаются на , а потому указанные точки делят окружность на n равных частей. Иными словами, они являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в эту окружность.

# Применение «Комплексных чисел в физике»

Когда речь пойдет об электротехнике, длина вектора внезапно превратится в амплитуду сигнала, а угол наклона – в фазу сигнала. Кстати, обратите внимание, что тригонометрическая форма записи комплексного числа чем-то близка к тригонометрическому кругу. Запишем закон изменения косинусоидального напряжения.

**



Вектор, равный по длине амплитуде нашего напряжения, вращается в системе координат, на оси Х (которая Re) вырисовывается закон косинуса (он полностью совпадает нашим сигналом v(t)). А на оси Y (которая Im) вырисовывается закон синуса. Итого на основе вышесказанного **наш исходный сигнал**

****

**мы можем представить в тригонометрической форме** вот так



или в **показательной форме** вот так



Давайте представим теперь, что у нас не косинусоидальный сигнал, а синусоидальный. К нему мы как-то больше привыкли. То есть, пусть напряжение изменяется вот по такому закону



Выходит, что **комплексное представление для случая синусоидального и косинусоидального сигнала имеет один и тот же вид.** Кстати, это довольно очевидно, если вспомнить, что при вращении вектора по окружности и синус и косинус вырисовываются одновременно на разных осях. А само комплексное число описывает именно этот вращающийся вектор и, таким образом, содержит в себе информацию как про ось Х, так и про ось Y.

Давайте теперь пойдем от обратного и представим, что у нас есть запись некоторого комплексного сигнала в виде



Или, например, в таком виде



Здесь уместно задать вопрос «как понять – что он описывает: синус или косинус?» Ответ очевиден, – да никак. Он описывает и то, и то одновременно. И если мы имеем **косинусоидальный** сигнал, то мы должны взять **действительную** часть этого комплексного сигнала, а если **синусоидальный** – **мнимую**. То есть **для случая косинуса** это выглядит как-то так:



или так



А **для случая синуса** это выглядит вот так



или так



Но, вернёмся к задаче, с которой началось моё исследование.

«Действующие значения напряжения и тока потребителя электрической энергии в комплексной форме изображаются в виде:

 В и А. Запишите выражения для мгновенных значений тока и напряжений при частоте , определите в комплексной форме полное сопротивление.»

Для нахождения мгновенных значений напряжений и токов необходимо записать их в показательной форме:

 ,

А.

Амплитудные значения напряжения и тока: , .

Так как начальные фазы и , то окончательно получаем:

Комплекс полного сопротивления равен отношению напряжения и тока ( по закону Ома)

Ом

Ответ: Ом

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В общем, я считаю, что цель и задача моего исследования выполнены. В ходе исследования я изучил много литературы по данной теме. В ходе чтения разных книг я отметил для себя наиболее интересные, простые и красивые доказательства теорем по этой теме, одновременно стараясь изложить их в своём свете, так, как я считаю наиболее рациональным.

 В представленной исследовательской работе получены следующие результаты.

1) Приведено систематическое изложение вопроса решения задач с комплексными числами.

2) Приведены решения задач с комплексными числами в алгебраической форме, вычисление операций сложения, вычитания, умножения, деления, операции сопряжения для комплексных чисел в алгебраической форме, степень мнимой единицы, модуль комплексного числа, а также изложено правило извлечения квадратного корня из комплексного числа.

3) Решены задачи, посвященные геометрической интерпретации комплексных чисел в виде точек или векторов комплексной плоскости;

4) Рассмотрены действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

5) Приведены решения некоторых физических задач с комплексными числами.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика. Энциклопедия для детей под редакцией М. Д. Аксёновой. – Москва-2000.

2. Алгебра и математический анализ для 11 класса под редакцией Н. Я. Виленкина. – Москва-1996.

3. История математики в школе под редакцией Г. И. Глейзер. – Москва-1983.

4. Избранные вопросы математики под редакцией И. Н. Антипова. – Москва-1979.

5. За страницами учебника математики под редакцией Н. Я. Виленкина. - Москва-1996.